Matematička indukcija

Matematička tvrdnja je tačna (istinita) za svaki prirodan broj ($n \in \mathbb{N}$) ako su ispunjena sljedeća dva uslova:
a) BAZA INDUKCIJE
Tvrdnja je tačna za broj 1.
b) INDUKCISKI KORAK
Ako na osnovu pretpostavke da je tvrdnja tačna za $k \leq n$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ slijedi da je istinita i za broj $n+1$.

\# Matematičkom indukcijom dokazati da za sve prirodne brojeve važe sljedeće jednakosti:
a) $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$
b) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
c) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Rj. a) $1+3+5+\ldots+(2k-1) = k^2$

BAZA INDUKCIJE
Pokažimo da je tvrdnja tačna za $k=1$. $1 = 1^2$ Tvrdnja je tačna za $k=1$.

KORAK INDUKCIJE
Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $k = 1, 2, \ldots, n$ tj. $1+3+5+\ldots+(2k-1) = k^2$ za sve k od 1 do n. Pokažimo da je tvrdnja tačna za $n+1$. tj. pokažimo da $1+3+\ldots+(2n+1) = (n+1)^2$

$$\underline{\underline{1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1)}} \overset{\text{prema pretpostavci}}{=} \underline{\underline{n^2}} + (2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

Dobili smo $1+3+5+\ldots+(2n+1) = (n+1)^2$ što je i trebalo.

ZAKLJUČAK
Jednakost $1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$ je tačna za sve prirodne brojeve.

b) $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$

BAZA INDUKCIJE
Pokažimo da je tvrdnja tačna za $k=1$. $1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2$ Tvrdnja je tačna za $k=1$

KORAK INDUKCIJE
Pretpostavimo da je $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$ za $\forall k = 1, 2, \ldots, n$
Na osnovu ove pretpostavke pokažimo da $1^3+2^3+\ldots+(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.
Imamo $1^2+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3 \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} =$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK
Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

c) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

BAZA INDUKCIJE ... sami...

KORAK INDUKCIJE
$\ldots \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$

$$\overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=} \frac{n}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK
Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve

1. Dokázati da je $2^n \geq 2n$ za $\forall (n \in \mathbb{N})$.

Rj. $2^k \geq 2 \cdot k$, k prirodan broj

BAZA INDUKCIJE
$k=1$: $2^1 \geq 2 \cdot 1$ tj. $2 \geq 2$ tačno
Za $k=1$ tvrdnja je tačna.

INDUKCISKI KORAK
Pretpostavimo da je $2^k \geq 2k$ za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$.
Na osnovu toga, dokažimo da je tačno i $2^{n+1} \geq 2(n+1)$.

$$\underline{\underline{2^{n+1}}} = 2^n \cdot 2 = 2^n + 2^n \geq 2^n + 2 \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{\geq} 2n+2 = \underline{\underline{2(n+1)}}$$

tj. $2^{n+1} \geq 2(n+1)$ što je i trebalo pokazati.

ZAKLJUČAK
Nejednakost $2^n \geq 2n$ je tačna za svaki prirodan broj.

2. Dokazati da je nejednakost $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ tačna za svaki privodan broj.

Rj. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{k}$, $k=1,2,3,\ldots$

BAZA INDUKCIJE $k=1$: $\frac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1}$ tj. $1 \geq 1$ tačno. Za $k=1$ nejednakost je tačna.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je nejednakost $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{k}$ tačna za svaki $k=1,2,\ldots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{\text{prema pretpostavci}}{\geq} \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}} > \frac{n+1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Nejednakost je tačna za svaki privodan broj.

3. Metodom matematičke indukcije dokazati da je 5^n+2^{n+1} djeljiv sa 3 za svaki privodan broj n.

Rj. Treba dokazati da je broj 5^k+2^{k+1} djeljiv sa 3 za $\forall k \in N$.

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $5^1+2^{1+1}=5+2^2=5+4=9$ 9 je djeljiv sa 3.

Za $k=1$ tvrdnja je tačna.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je 5^k+2^{k+1} djeljivo sa 3 za $k=1,2,\ldots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je i $5^{n+1}+2^{n+1+1}$ djeljivo sa 3.

$$5^{n+1}+2^{n+1+1}=5^{n+1}+2^{n+2}=5\cdot 5^n+2\cdot 2^{n+1}=2\cdot 5^n+2\cdot 2^{n+1}+3\cdot 5^n$$

$$=2\underbrace{(5^n+2^{n+1})}_{\text{ovaj dio je prema pretpostavci djeljiv sa 3}}+\underbrace{3\cdot 5^n}_{\text{ovo je djeljivo sa 3}}$$

Prema tome $5^{n+1}+2^{n+2}$ je djeljivo sa 3.

ZAKLJUČAK

5^k+2^{k+1} je djeljivo sa 3 za svaki privodan broj k.

4. Metodom matematičke indukcije dokazati da jednakost $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ vrijedi za sve privodne brojeve.

Rj. $1^3+2^3+\ldots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$, k je privodan broj.

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $1^3=\frac{1^2\cdot(1+1)^2}{4} \Rightarrow 1=\frac{4}{4} \Rightarrow 1=1$ što je tačno.

Za $k=1$ jednakost je tačna

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $1^3+2^3+\ldots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$ tačno za $k=1,\ldots,n$

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je

$$1^3+2^3+\ldots+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3 \overset{\text{prema pretpostavci}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve privodne brojeve.

5. Dokazati da je $4^n+15n-1$ djeljivo sa 9 za svaki privodan broj n.

Rj. Treba dokazati da je $4^k+15k-1$ djeljivo sa 9 za $\forall(k\in N)$.

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $4^1+15\cdot 1-1=4+15-1=18$, 18 je djeljivo sa 9.

Tvrdnja je tačna za $k=1$.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $4^k+15\cdot k-1$ djeljivo sa 9 za $k=1,2,\ldots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je $4^{n+1}+15(n+1)-1$ tj. $4^{n+1}+15n+14$ djeljivo sa 9.

$$4^{n+1}+15n+14 = 4\cdot 4^n+15n-1+15 = 4\cdot 4^n+2\cdot 15n-2+16-15n =$$
$$= 4\cdot 4^n+4\cdot 15n-4+18-3\cdot 15n = 4(4^n+15n-1)+18-9\cdot 5n$$
$$= \underbrace{4(4^n+15n-1)}_{\text{ovo je prema pretpostavci djeljivo sa 9}} + \underbrace{9(2-5n)}_{\text{ovo je djeljivo sa 9}}$$

Prema tome $4^{n+1}+15n+14$ je djeljivo sa 9.

ZAKLJUČAK

$4^n+15n-1$ je djeljivo sa 9 za svaki prirodan broj n.

6. Dokazati Bernulijevu nejednakost $(1+h)^n \geq 1+n\cdot h$ gdje je $h>-1$, a n pozitivan cijeli broj.

Rj. $(1+h)^k \geq 1+k\cdot h$, $h\in\mathbb{R}$, $h>-1$, $k\in\mathbb{N}$.

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $(1+h)^1 \geq 1+1\cdot h \Rightarrow 1+h\geq 1+h$ ovo je tačno

Za $k=1$ nejednakost je tačna.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $(1+h)^k\geq 1+k\cdot h$ za $k=1,2,\dots,n$, $h>-1$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je

$$(1+h)^{n+1}\geq 1+(n+1)h$$

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{\geq} (1+nh)(1+h) = 1+h+nh+nh^2 \overset{h^2\geq 0}{\geq}$$
$$1+h+nh = 1+(n+1)h \text{ što je i trebalo dobiti.}$$

ZAKLJUČAK

Nejednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

7. Metodom matematičke indukcije dokazati da jednakost $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\dots+n(3n-1)=n^2(n+1)$ vrijedi za sve prirodne brojeve n.

8. Fibonačijev niz 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... je definisan rekurzivnom formulom $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ gdje su $a_1=a_2=1$. Dokazati da je $NZD(a_n,a_{n+1})=1$ za sve prirodne brojeve n (NZD je skraćenica od najveći zajednički djelilac, npr. $NZD(14,35)=7$).

Rj. $a_1=a_2=1$

$a_{k+1}=a_k+a_{k-1}$, $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$

Treba dokazati da je $NZD(a_k,a_{k+1})=1$, za $\forall k\in\mathbb{N}$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $a_1=1$, $a_2=1$, $NZD(a_1,a_2)=NZD(1,1)=1$ Tvrdnja je tačna za $k=1$.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $NZD(a_k,a_{k+1})=1$ za sve $k=1,2,\dots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je $NZD(a_{n+1},a_{n+2})=1$.

$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ Označimo sa d NZD od brojeva a_{n+1} i a_{n+2}

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ tj. $NZD(a_{n+1},a_{n+2})=d$.

Nađimo, čemu je d jednako? Odredimo d.

$NZD(a_{n+1},a_{n+2})=d \Rightarrow d\,|\,a_{n+1}$ (d dijeli a_{n+1}) i $d\,|\,a_{n+2}$ (d dijeli a_{n+2})

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_n=a_{n+2}-a_{n+1} \\ d\,|\,a_{n+1} \\ d\,|\,a_{n+2}\end{array}\right\} \Rightarrow d\,|\,a_n \text{ (d dijeli } a_n)$$

$$\text{Prema pretpostavci } \left.\begin{array}{l} d\,|\,a_n \\ d\,|\,a_{n+1} \\ \text{i } NZD(a_n,a_{n+1})=1\end{array}\right\} \Rightarrow d=1 \text{ što je i trebalo dobiti}$$

ZAKLJUČAK

$NZD(a_n,a_{n+1})=1$ za sve prirodne brojeve n, $\{a_n\}$ Fibon. niz

9. Dokazati da je broj $2^{2n}-3n-1$ djeljiv sa 9 za svaki prirodan broj veći od 1.

10. Metodom matematičke indukcije dokazati da jednakost $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\dots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ vrijedi za sve prirodne brojeve n.

11. Dokazati Moavrov obrazac $(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$.

Rj. $(\cos x+i\sin x)^k=\cos kx+i\sin kx,\quad k\in\mathbb{N}$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $(\cos x+i\sin x)^1=\cos x+i\sin x$, Za $k=1$ tvrdnja je tačna.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $(\cos x+i\sin x)^k=\cos kx+i\sin kx$ za $k=1,2,\dots,n$

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je

$$(\cos x+i\sin x)^{n+1}=\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x.$$

$$(\cos x+i\sin x)^{n+1}=(\cos x+i\sin x)^n\cdot(\cos x+i\sin x)\overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=}$$

$$=(\cos nx+i\sin nx)\cdot(\cos x+i\sin x)=\cos nx\cdot\cos x+i\cos nx\sin x+i\sin nx\cos x+i^2\sin nx\sin x\overset{(*)}{=}$$

Adicione teoreme

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\overset{(*)}{=}\cos(nx+x)+i\sin(nx+x)=\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x$$

što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

12. Metodom matematičke indukcije dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost

$$1+q+q^2+\dots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\quad \text{gdje je } q\in\mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

Rj. $1+q+q^2+\dots+q^k=\dfrac{1-q^{k+1}}{1-q}$, $q\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $k\in\mathbb{N}$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $1+q=\dfrac{1-q^{1+1}}{1-q}=\dfrac{1-q^2}{1-q}=\dfrac{(1-q)(1+q)}{(1-q)}$ tj. $1+q=1+q$

Za $k=1$ jednakost je tačna

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $1+q+q^2+\dots+q^k=\dfrac{1-q^{k+1}}{1-q}$ za $k=1,2,\dots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je

$$1+q+q^2+\dots+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$$

$$1+q+q^2+\dots+q^n+q^{n+1}\overset{\text{prema pretpostavci}}{=}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}(1-q)}{1-q}$$

$$=\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+1+1}}{1-q}=\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

13. Ako su $x_1,x_2,\dots,x_n$ nenegativni realni brojevi, onda aritmetičku sredinu (prosjek) definišemo kao broj $A=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)$ i njegovu geometrisku sredinu kao broj $G=\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}$. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\le\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n).$$

(Nejednakost prelazi u jednakost akko je $x_1=x_2=\dots=x_n$)

Rj. $A=\frac{1}{k}(x_1+x_2+\dots+x_k)$, $G=\sqrt[k]{x_1x_2\dots x_k}$, $G\le A$, $k\in\mathbb{N}$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $\sqrt[1]{x_1}\le\frac{1}{1}(x_1)$ tj. $x_1\le x_1$ Za $k=1$ nejednakost je tačna.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $\sqrt[k]{x_1x_2\dots x_k}\le\frac{1}{k}(x_1+x_2+\dots+x_k)$ za $k=1,2,\dots,n$.

Dokažimo da je $\sqrt[n+1]{x_1x_2\dots x_{n+1}}\le\dfrac{1}{n+1}(x_1+x_2+\dots+x_{n+1})$.

Ne gubeći opštost dokaza možemo smatrati da je $x_1\le x_2\le\dots\le x_{n+1}$ (**)

Označimo sa $A=\dfrac{1}{n+1}(x_1+x_2+\dots+x_{n+1})$, i sa $G=\sqrt[n+1]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{n+1}}$.

Primijetimo da vrijedi

$$x_1=\frac{1}{n+1}\underbrace{(x_1+x_1+\dots+x_1)}_{(n+1)\text{ puta}}\overset{(*)}{\le}A\overset{(*)}{\le}\frac{1}{n+1}(x_{n+1}+x_{n+1}+\dots+x_{n+1})=x_{n+1}\ (**)$$

Posmatrajmo sada sljedeće brojeve $x_2,x_3,\dots,x_n,\ x_1+x_{n+1}-A$.

$(**) \Rightarrow A - x_1 \geq 0 \; ; \; x_{n+1} - A \geq 0 \; i \; x_1 + x_{n+1} - A \geq 0$

Pa je $(A - x_1)\cdot(x_{n+1} - A) \geq 0$

$$\underline{A x_{n+1}} \underline{- A^2} - x_1 x_{n+1} + \underline{A x_1} \geq 0$$

$$A(x_1 + x_{n+1} - A) \geq x_1 x_{n+1}$$

Na n brojeva $x_2, x_3, \ldots, x_n, \underline{x_1 + x_{n+1} - A}$ primjenimo indukcisku pretpostavku, dobićemo:

$$\frac{1}{n}(x_2 + x_3 + \ldots + x_n + \overbrace{x_1 + x_{n+1} - A}) \geq \sqrt[n]{x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot (x_1 + x_{n+1} - A)}$$

$$\left[\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} - A)\right]^n \geq x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot (x_1 + x_{n+1} - A)$$

$$\left[\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} - A)\right]^n = \left[\frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} - \frac{1}{n+1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1})\right)\right]^n =$$

$$x_1 - \frac{x_1}{n+1} = \frac{x_1(n+1) - x_1}{n+1} = \frac{x_1 \cdot n}{n+1}$$

$$x_2 - \frac{x_2}{n+1} = \frac{x_2 n + x_2 - x_2}{n+1} = \frac{x_2 \cdot n}{n+1}$$

$$\vdots$$

$$= \left[\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1})\right)\right]^n =$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1})\right]^n = A^n$$

Pa imamo $A^n \geq x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n (x_1 + x_{n+1} - A) \quad / \cdot A$

$$A^{n+1} \geq x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot A(x_1 + x_{n+1} - A) \overset{\text{kako je } A(x_1 + x_{n+1} - A) \geq x_1 x_{n+1}}{\geq} x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \geq \sqrt[n+1]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{n+1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1}) \geq \sqrt[n+1]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}}$$

što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Nejednakost je tačna za sve prirodne brojeve n.

14. Metodom matematičke indukcije dokazati:

a) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$, n je prirodan broj.

b) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$, $n \in N$.

c) $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$, $n \in N$.

d) $2 + 4 + 6 + \ldots + (2n) = n(n+1)$, $n \in N$.

e) $1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$, $a \neq 1$, $n \in N$.

(#) Dokazati matematičkom indukcijom tvrdnju

$5 \mid (n^5 - n)$, $n \in N$.

Rj.

$5 \mid (k^5 - k)$, $k \in N$ (ovo čitamo: pet dijeli $k^5 - k$ gdje je k neki prirodan broj) ili $k^5 - k$ je djeljivo sa 5)

BAZA INDUKCIJE

$k = 1$: $5 \mid (1^5 - 1)$ tj. $5 \mid 0$ 5 dijeli 0 tj. $0 = 5 \cdot s$ gdje je s neki broj iz N.

Tvrdnja je tačna za $k = 1$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je tvrdnja $5 \mid (k^5 - k)$ tačna za sve brojeve od 1 do n. Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da $5 \mid (n+1)^5 - (n+1)$

$$(n+1)^5 - (n+1) = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n \underline{+1} - n \underline{-1} =$$

$$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n - n =$$

$$= \underbrace{(n^5 - n)}_{\substack{\text{ovo je} \\ \text{prema pretpostavci} \\ \text{djeljivo sa 5}}} + \underbrace{5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)}_{\substack{\text{ovo je djeljivo} \\ \text{sa 5 (vidi se)}}}$$

Prema tome $5 \mid (n+1)^5 - (n+1)$ što je i trebalo pokazati

ZAKLJUČAK

Tvrdnja je tačna za sve prirodne brojeve.

Dokazati matematičkom indukcijom da važi

$$1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1+(-1)^{n-1}x^n}{1+x} \quad (x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}).$$

Rj.

BAZA INDUKCIJE

Dokažimo da je jednakost tačna za broj 1

$$1 = \frac{1+(-1)^0 x^1}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} = 1$$

Jednakost je tačna za broj 1.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost $1-x+x^2-\dots+(-1)^{k-1}x^{k-1} = \frac{1+(-1)^{k-1}x^k}{1+x}$ tačna za sve brojeve k od 1 do n i na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je jednakost tačna za n+1

tj. dokažimo $1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^n x^n = \frac{1+(-1)^n x^{n+1}}{1+X}$

$$1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^nx^n \stackrel{\text{na osnovu pretpostavke}}{=} \frac{1+(-1)^{n-1}x^n}{1+x}+(-1)^nx^n =$$

$$= \frac{1+(-1)^{n-1}x^n+(-1)^nx^n\cdot(1+x)}{1+x} = \frac{1+[(-1)^{n-1}+(-1)^n(1+x)]x^n}{1+x} =$$

$$= \frac{1+[(-1)^{n-1}(1+(-1)(1+x)]x^n}{1+x} = \frac{1+[(-1)^{n-1}\cdot(1-1-x]x^n}{1+x} =$$

$$= \frac{1+(-1)^{n-1}\cdot(-1)x\cdot x^n}{1+x} = \frac{1+(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

što je i trebalo dobiti

Jednakost je tačna za n+1

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

Matematičkom indukcijom dokazati da je $3\cdot5^{2n+1}+2^{3n+1}$ djeljivo sa 17 za svaki prirodan broj n.

Rj. $3\cdot5^{2k+1}+2^{3k+1}$ djeljivo sa 17, $k\in\mathbb{N}$

BAZA INDUKCIJE

k=1: $3\cdot5^{2+1}+2^{3+1} = 3\cdot5^3+2^4 = 3\cdot125+16 = 375+16 = 391$

391 : 17 = 23
34
 51
 51
 ==

Broj 391 jest djeljiv sa 17

Tvrdnja je tačna za broj 1

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je $3\cdot5^{2k+1}+2^{3k+1}$ djeljivo sa 17 za svaki broj k od 1 do n. Uz pomoć ove pretpostavke dokažimo da je $3\cdot5^{2(n+1)+1}+2^{3(n+1)+1}$ djeljivo sa 17.

$$3\cdot5^{2(n+1)+1}+2^{3(n+1)+1} = 3\cdot5^{2n+3}+2^{3n+4} = 3\cdot5^{2n+1}\cdot5^2+2^{3n+1}\cdot2^3 =$$

$$=25(3\cdot5^{2n+1})+8(2^{3n+1}) = 17(3\cdot5^{2n+1})+8(3\cdot5^{2n+1})+$$

$$+8(2^{3n+1}) = \underbrace{17\cdot(3\cdot5^{2n+1})}_{\text{vidimo da je ovo djeljivo sa 17}}+8\underbrace{(3\cdot5^{2n+1}+2^{3n+1})}_{\text{na osnovu pretpostavke ovo je djeljivo sa 17}}$$

Prema tome tvrdnja je tačna za n+1, tj. $3\cdot5^{2(n+1)+1}+2^{3(n+1)+1}$ je djeljivo sa 17.

ZAKLJUČAK

Tvrdnja je tačna za svaki prirodan broj n.

Dokazati metodom matematičke indukcije da za sve prirodne brojeve n važi

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{n}{2n+4}.$$

Rj. $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{k^2+3k+2}=\frac{k}{2k+4}$, k je pozitivan cijeli br.

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot 1+4} \Rightarrow \frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ jednakost je tačna za $k=1$.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je jednakost tačna za $k=1,2,\dots,n$,

tj. $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{k^2+3k+2}=\frac{k}{2k+4}$, $k=1,2,\dots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je jednakost tačna za $n+1$ tj. da je

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{(n+1)^2+3(n+1)+2}=\frac{n+1}{2(n+1)+4}$$

$(n+1)^2=n^2+2n+1$

$3(n+1)=3n+3$

ili drugačije napisano $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{n^2+5n+6}=\frac{n+1}{2n+6}$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{n^2+3n+2}+\frac{1}{n^2+5n+5}\overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=}\frac{n}{2n+4}+\frac{1}{n^2+5n+6}$$

$n^2+5n+6=0$

$D=25-24=1$

$n_{1,2}=\frac{-5\pm 1}{2}$

$n_1=\frac{-6}{2}=-3 \quad n_2=\frac{-4}{2}=-2$

$$=\frac{n}{2(n+2)}\cdot\frac{(n+3)}{(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}\cdot\frac{2}{2}=\frac{n(n+3)+2}{2(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n^2+3n+2}{2(n+2)(n+3)}=\frac{\cancel{(n+2)}(n+1)}{2\cancel{(n+2)}(n+3)}=\frac{n+1}{2n+6}$$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

Dokazati metodom matematičke indukcije da za sve prirodne brojeve n važi

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\dots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

Rj. $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\dots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $\frac{1^2}{1\cdot 3}=\frac{1\cdot(1+1)}{2(2+1)}$ tj. $\frac{1}{3}=\frac{2}{2\cdot 3}=\frac{1}{3}$

Jednakost je tačna za broj 1

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\dots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$ tačna za svako k od 1 do n.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je jednakost tačna za $n+1$ tj. dokažimo da je

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\dots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}.$$

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\dots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}\overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)(2n+3)+(n+1)^2\cdot 2}{2(2n+1)(2n+3)}=$$

$$=\frac{(n+1)[n(2n+3)+2(n+1)]}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(2n^2+3n+2n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(2n^2+5n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)(n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$$ što je i trebalo dobiti

Jednakost je tačna za $n+1$.

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

Dokazati metodom matematičke indukcije da vrijedi za sve $n\in\{2,3,4,\dots\}$:

$$\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\dots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^{n}}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2}.$$

Rj. postavka zadatka

$$\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\dots+\frac{1}{\log_x 2^{k-1}\cdot\log_x 2^{k}}=\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2},\quad k=2,3,\dots$$

BAZA INDUKCIJE

$k=2$: $$\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 2}=\frac{1}{\log_x 2\cdot 2\log_x 2}=\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}$$

Tvrdnja je tačna za $k=2$.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost $\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\dots+\frac{1}{\log_x 2^{k-1}\log_x 2^{k}}=\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2}$ tačna za svako $k=2,3,\dots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je

$$\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\dots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^{n}}+\frac{1}{\log_x 2^{n}\cdot\log_x 2^{n+1}}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\dots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^{n}}}_{\text{na osnovu pretpostavke}}+\frac{1}{\log_x 2^{n}\cdot\log_x 2^{n+1}}$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2}+\frac{1}{\log_x 2^{n}\cdot\log_x 2^{n+1}}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2}+\frac{1}{n\cdot(n+1)\log_x 2\cdot\log_x 2}$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2}+\frac{1}{n(n+1)(\log_x 2)^2}=\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

$$=\left(1+\frac{-(n+1)+1}{n(n+1)}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2}=\left(1+\frac{-n}{n(n+1)}\right)\cdot\frac{1}{(\log_x 2)^2}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve brojeve $n\in\{2,3,4,\dots\}$

Dokazati matematičkom indukcijom tvrdnju

$7\mid(n^7-n)$, $n\in\mathbb{N}$.

Rj. BAZA INDUKCIJE

Dokažimo da je tvrdnja tačna za broj 1.

$n=1$: $n^7-n=1^7-1=0$, $7\mid 0$ (7 dijeli 0)

$0=7\cdot 0$ Tvrdnja je tačna za broj 1.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za brojeve od 1 do n tj. $7\mid(k^7-k)$ za $k=1,2,3,\dots,n-1,n$. Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je tvrdnja tačna za $n+1$ tj: da $7\mid[(n+1)^7-(n+1)]$.

$$n^7-n=n(n^6-1)=n(n^3-1)(n^3+1)=n(n-1)(n^2+n+1)(n+1)(n^2-n+1)$$

$$(n+1)^7-(n+1)=(n+1)\left[(n+1)^6-1\right]=(n+1)\left[(n+1)^3-1\right]\left[(n+1)^3+1\right]=$$

$$=(n+1)\left[(n+1)-1\right]\left[(n+1)^2+n+1+1\right]\left[(n+1)+1\right]\left[(n+1)^2-(n+1)+1\right]$$

$$=(n+1)\,n\,(n^2+3n+3)(n+2)(n^2+n+1)$$

Pronađimo vezu između $(n-1)(n^2-n+1)$ i $(n^2+3n+3)(n+2)$

$$\left.\begin{aligned}&(n-1)(n^2-n+1)=n^3-n^2+n-n^2+n-1=n^3-2n^2+2n-1\\&(n+2)(n^2+3n+3)=n^3+3n^2+3n+2n^2+6n+6=n^3+5n^2+9n+6\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+2)(n^2+3n+3)=(n-1)(n^2-n+1)-7n^2-7n-7$$

pa imamo: $$(n+1)^7-(n+1)=(n+1)n(n^2+n+1)\left[(n-1)(n^2-n+1)-7(n^2+n+1)\right]$$

$$=(n+1)n(n^2+n+1)(n-1)(n^2-n+1)-7(n+1)n(n^2+n+1)^2$$

$$=\underbrace{(n^7-n)}_{A}-\underbrace{7n(n+1)(n^2+n+1)^2}_{B}$$

$\left.\begin{array}{l}A \text{ je prema pretpostavci djeljivo sa } 7\\ B \text{ je očigledno djeljivo sa } 7\end{array}\right\}\Rightarrow (n+1)^7-(n+1)$ je djeljivo sa 7 tj. $7\mid(n+1)^7-(n+1)$

ZAKLJUČAK

Tvrdnja $7\mid(n^7-n)$ je tačna za sve prirodne brojeve